1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Questionnaire et Corrigé
Examen de math B du 17 août 2015
géologues

Version 19 août 2015

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f par $f(x) = \sqrt{1-8x^2}$.
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, au voisinage de 0, représenter le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

2. Soient les matrices A, B, C et X données par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

   - Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.
   - La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
   - La matrice B commute-t-elle avec la matrice C ? Justifier.
   - Montrer $\boxed{\textbf{directement}}$ que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

3. a) On donne la fonction f par

$$f(x,y) = \sqrt{\arcsin(xy)}.$$

   - Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
   - Dans ce domaine, simplifier au maximum l'expression $xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y)$.

   b) On donne l'ensemble borné fermé A suivant

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], y \in [\sqrt{1-x^2}, x] \right\}.$$

   - Représenter l'ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant.

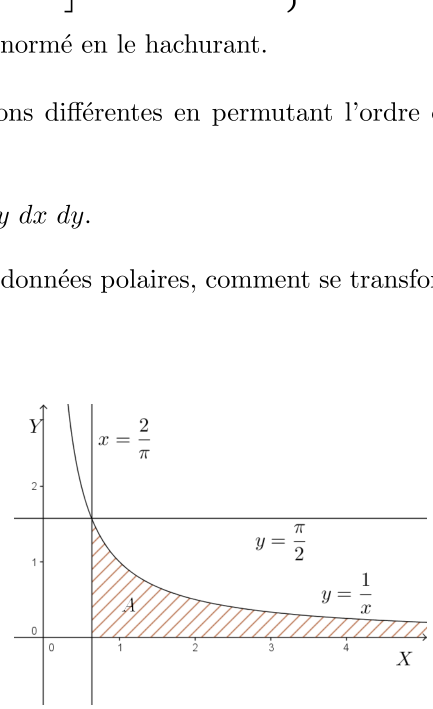
   - Ecrire l'intégrale double suivante de deux façons différentes en permutant l'ordre d'intégration puis, si elle existe, en déterminer sa valeur.

$$\iint_A xy \, dx \, dy.$$

   - En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, comment se transforme l'expression de l'intégrale sur A de $f : (x,y) \mapsto xy$?

4. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
   Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} \, dx \, dy.$$



5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

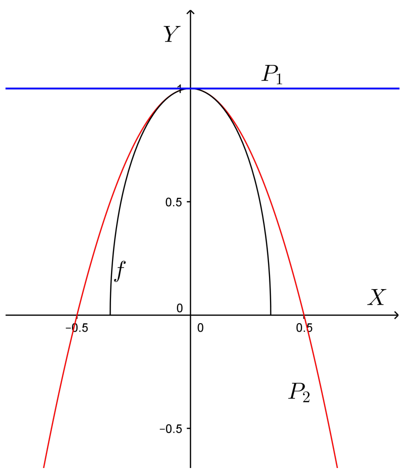
$$(i)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^2+3}{m+3}, \qquad (ii)\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!}\ , \qquad (iii)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}.$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f par $f(x) = \sqrt{1-8x^2}$.**
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, au voisinage de 0 , représenter le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs. .

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}[$ et on a
   $$Df(x) = \frac{-8x}{\sqrt{1-8x^2}}, \quad D^2f(x) = \frac{-8}{\sqrt{(1-8x^2)^3}}.$$
   Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 0$ et $\ D^2f(0) = -8$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
   $$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1-4x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **Soient les matrices A, B, C et X données par**
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$
   - Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.

   Solution. La matrice B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$. Comme $\det B = -9$, la matrice B est donc inversible.

   La matrice des cofacteurs de B étant égale à
   $$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$
   l'inverse de B est la matrice
   $$B^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$. La matrice B possède donc deux valeurs propres simples, -3 et 3 ; elle est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -3 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B-3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc des vecteurs du type

$$c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice inversible $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- La matrice B commute-t-elle avec la matrice C ? Justifier.

Solution. Comme B et C sont des matrices de dimension 2, leurs produits sont envisageables. On a

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$CB = \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Puisque $BC = CB$, la matrice B commute avec la matrice C.

- Montrer $\boxed{\text{directement}}$ que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

Solution. Par définition, un vecteur non nul X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 si $AX = \lambda_0 X$. Comme

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix},$$

X est bien un vecteur propre de A de valeur propre -1.

3. **a) On donne la fonction f par**

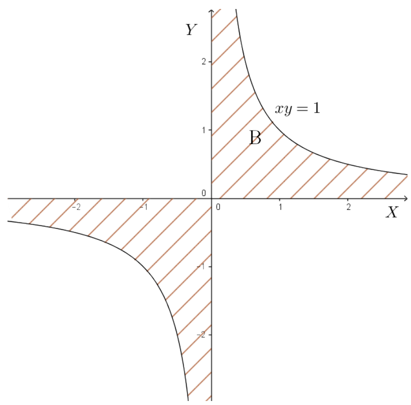
$$f(x,y) = \sqrt{\arcsin(xy)}.$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(xy) > 0, -1 < xy < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 1$, ainsi que ceux des axes, sont exclus de l'ensemble.



- Dans ce domaine, simplifier au maximum l'expression $xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y)$.

Solution. En un point (x,y) de B on a

$$(D_xf)(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \quad \text{et} \quad (D_yf)(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

L'expression donnée est donc nulle puisque

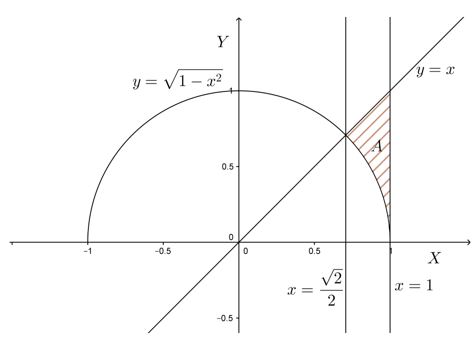
$$xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = 0.$$

b) On donne l'ensemble borné fermé A suivant

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], y \in [\sqrt{1-x^2}, x]\right\}.$$

- Représenter l'ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Solution.



Les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.

- Ecrire l'intégrale double suivante de deux façons différentes en permutant l'ordre d'intégration puis, si elle existe, en déterminer sa valeur.

$$\iint_A xy \, dx \, dy.$$

Solution. D'une part,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], y \in \left[\sqrt{1-x^2}, x\right]\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], x \in \left[\sqrt{1-y^2}, 1\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], x \in [y, 1]\right\}.$$

D'autre part, la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé ; elle y est intégrable.
On peut donc écrire

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dy\right) \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} xy \, dx\right) \, dy + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\int_y^1 xy \, dx\right) \, dy.$$

On calcule ensuite la valeur de l'intégrale et on a

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dy\right) \, dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{x} \, dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} x\left(2x^2 - 1\right) \, dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(2x^3 - x\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{4}\left[x^2(x^2-1)\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

- En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, comment se transforme l'expression de l'intégrale sur A de $f : (x,y) \mapsto xy$?

Solution. Puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$, que le rayon de l'arc de cercle vaut 1 et vu la relation liant les deux côtés d'un triangle rectangle, l'ensemble A exprimé en coordonnées polaires est

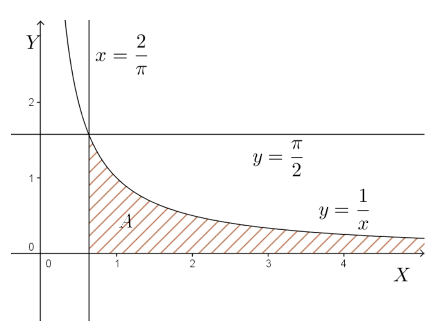
$$A' = \left\{(r,\theta) : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ r \in \left[1, \frac{1}{\cos(\theta)}\right]\right\}.$$

Le théorème de changement de variables en coordonnées polaires donne

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \iint_{A'} r^3 \cos(\theta)\sin(\theta) \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{\frac{1}{\cos(\theta)}} r^3 \cos(\theta)\sin(\theta) \, dr\right) \, d\theta.$$

4. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.**
   Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} \, dx \, dy.$$



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\cos(y)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$; elle est donc continue sur $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right], \ x \in \left[\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{1}{y}\right]\right\}$, ensemble fermé non borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y) \ \forall (x, y) \in A$.
Pour y fixé dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\cos(y)}{x^2}$ est continue sur le fermé borné $\left[\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{1}{y}\right]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{2/\pi}^{1/y} \frac{\cos(y)}{x^2} \, dx = -\cos(y) \ . \ \left[\frac{1}{x}\right]_{2/\pi}^{1/y} = \cos(y) \ . \left(-y + \frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction $h : y \mapsto \cos(y) \ . \left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, \pi/2]$ fermé borné. Elle est donc intégrable sur $]0, \pi/2]$.
La fonction f est donc intégrable sur A et en intégrant par parties, on obtient

$$\iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2/\pi}^{1/y} \frac{\cos(y)}{x^2} \, dx\right) dy = \int_0^{\pi/2} \cos(y) \ \left(\frac{\pi}{2} - y\right) \ dy$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \ \sin(y) \ \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin(y) \ dy = 0 - \left[\ \cos(y) \ \right]_0^{\pi/2} = 1.$$

5. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i) \ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^2 + 3}{m + 3}, \qquad (ii) \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!} \ , \qquad (iii) \ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}.$$

Solution. (i) Comme le terme général de cette série ne tend pas vers 0 puisque $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{m^2 + 3}{m + 3} = +\infty$, la série est divergente.

(ii) Cette série est convergente car c'est la valeur de la fonction exponentielle en e. La somme de cette série vaut donc $\exp(e)$.

(iii) Puisque

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n,$$

cette série est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \in \ ]-1, 1[$ donc convergente ; sa somme vaut

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 \ \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2(\sqrt[3]{2} - 1)}.$$